2.4 Polynom vom Grad 3

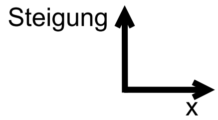
Titel	V2- 2-4 Polynom vom Grad 3
Version	Mai 2010
Themenbereich	Von der Sekanten- zur Tangentensteigung
Themen	Verfeinerung der Intervalle zur Bestimmung der Steigung an mehreren Punkten eines Graphen im Hinblick auf die (gesamte) Ableitungsfunktion
Rolle des CAS	Berechnungen mit einer Tabellenkalkulation bzw. Aufstellen von Wertetabellen Zeichnen von Graphen
Methoden Hinweise	Diese Aufgabe dient als <u>ein</u> Beispiel auf dem Weg zur mathematischen Herleitung der Tangentensteigungsfunktion, d. h. der Ableitungsfunktion – weitere müssen folgen. Die Tangentensteigungen an einzelnen Punkten wurden im vorher stattfindenden Unterricht bereits näherungsweise bestimmt. In dieser Aufgabe wird nun der Übergang zu beliebigen Punkten des Graphen vollzogen und damit macht es zum ersten Mal Sinn, von einer Ableitungsfunktion zu „sprechen“. Empfehlenswert ist es, wie in dieser Aufgabe ausgeführt, die Schülerinnen und Schüler immer wieder Ableitungsfunktionen auch händisch, d. h. ohne Zuhilfenahme eines CAS, zeichnen zu lassen. Einige mathematische Taschencomputer bieten auch die Möglichkeit an, Steigungsfunktionen zu gegebenen Funktionen zeichnen zu lassen. Das ist eine gute Ergänzung zum händischen Erstellen derselben. Die Aufgabenteile a) und b) könnten auch (offener) durch einen Aufgabenteil ersetzt werden, in dem nur die Zeichnung der Steigungsfunktion verlangt wird. Als Hausaufgaben bieten sich entsprechende Aufgaben mit einer Variation des Funktionsterms an.
Quelle	CiMS
Zeitlicher Rahmen	1 Schulstunde

Von der mittleren zur lokalen Änderung

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\frac{1}{10}\cdot(x+3)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$. Der zugehörige Graph ist im oberen Koordinatensystem der Anlage 1 gezeichnet.

a. Bestimmen Sie zunächst grafisch die Steigung des Funktionsgraphen an den Stellen $x=-3$ und $x=6$.
Tragen Sie nun die Punkte P_{-3} = (-3 | Steigung an der Stelle -3) und P_6 = (6 | Steigung an der Stelle 6) in das untere Koordinatensystem der Anlage 1 ein.

b. Prinzipiell könnten Sie, wie im Aufgabenteil a), die Steigungen für jede Stelle *x* des Definitionsbereiches bestimmen und die entsprechenden Punkte P_6 in das Koordinatensystem eintragen.
Stellen Sie sich vor, dass Sie die entsprechenden Werte in ein Koordinatensystem einzeichnen. Wie würde der entsprechende Graph aussehen? Skizzieren Sie einen entsprechenden Graphen in das untere Koordinatensystem der Anlage 1.

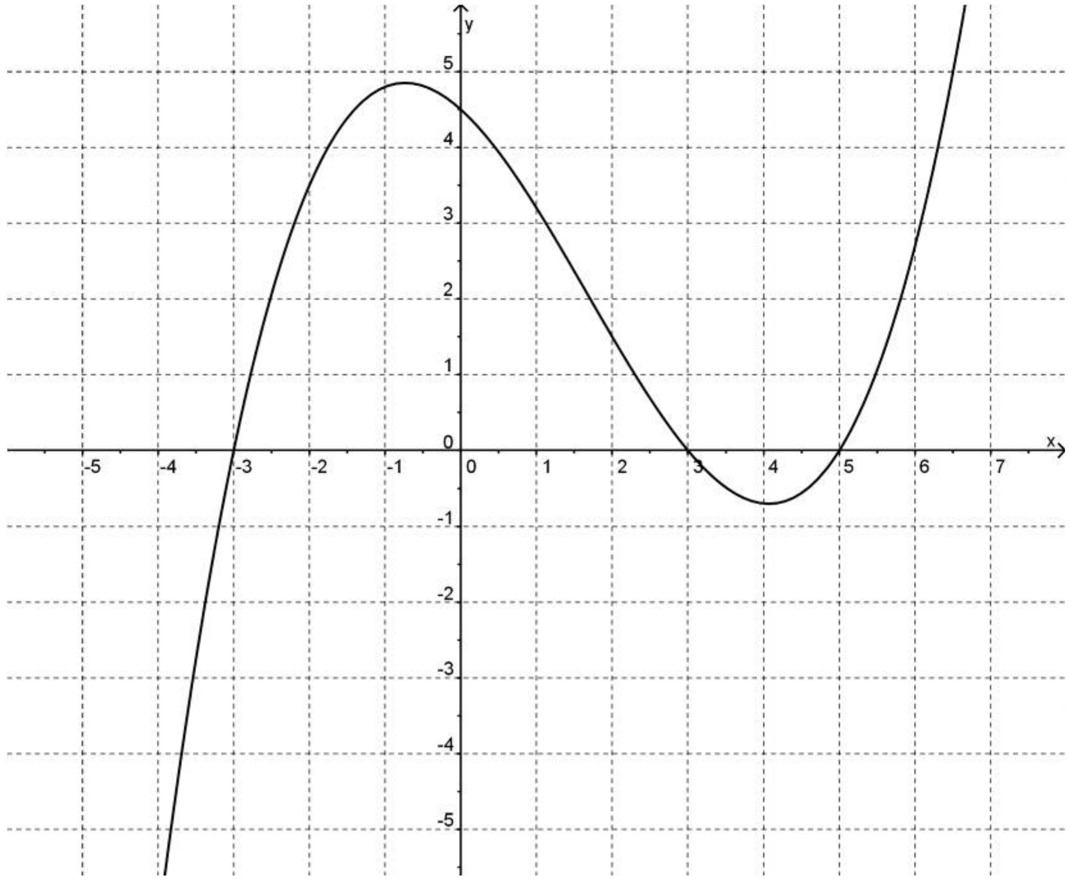


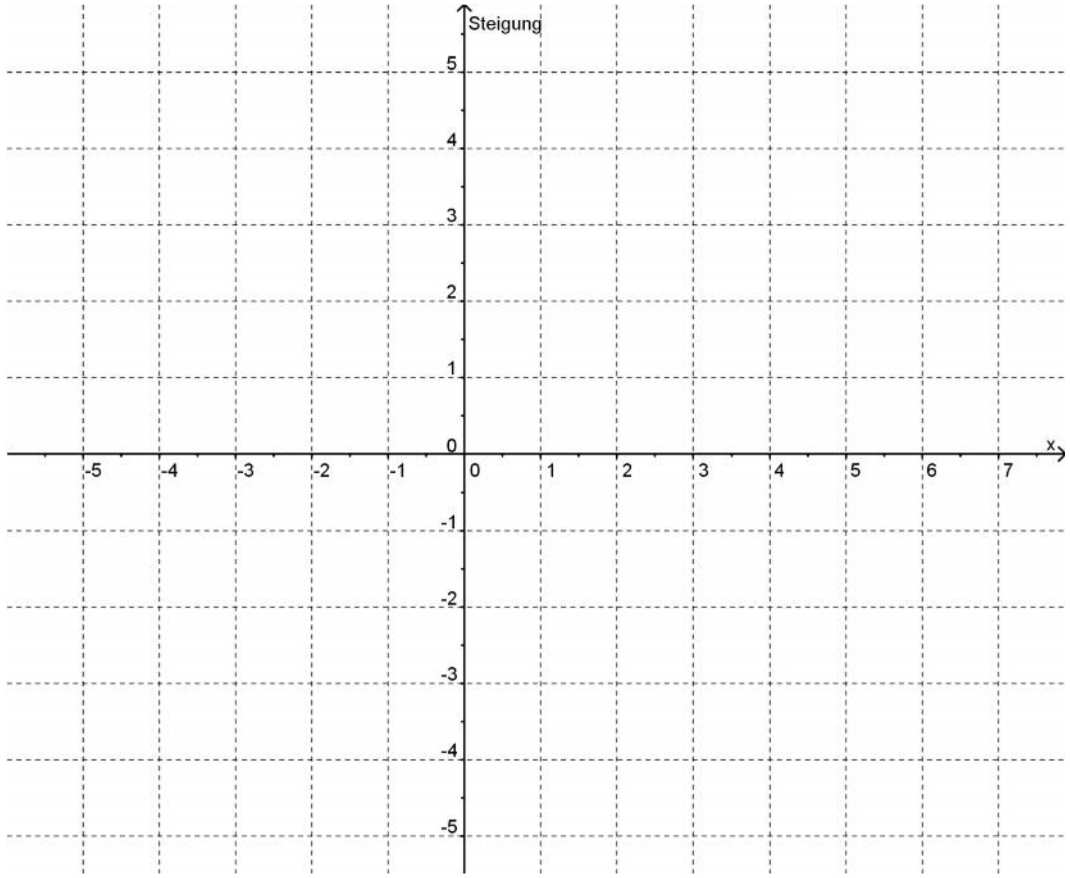
c. Bestimmen Sie jeweils die Steigung des Graphen an den Stellen $x=-3$, $x=6$ und $x=-1$ rechnerisch.

d. Berechnen Sie die jeweiligen Steigungen des Graphen für (viele) verschiedene Werte von *x* innerhalb des Intervalls $[-4;7]$.
Arbeiten Sie arbeitsteilig.
Tragen Sie Ihre Ergebnisse zusammen und übertragen Sie die herausgefundenen Werte in das Koordinatensystem der Anlage 2.
Vergleichen Sie Ihre rechnerische Lösung mit der grafischen Lösung der 2. Koordinatensystems.

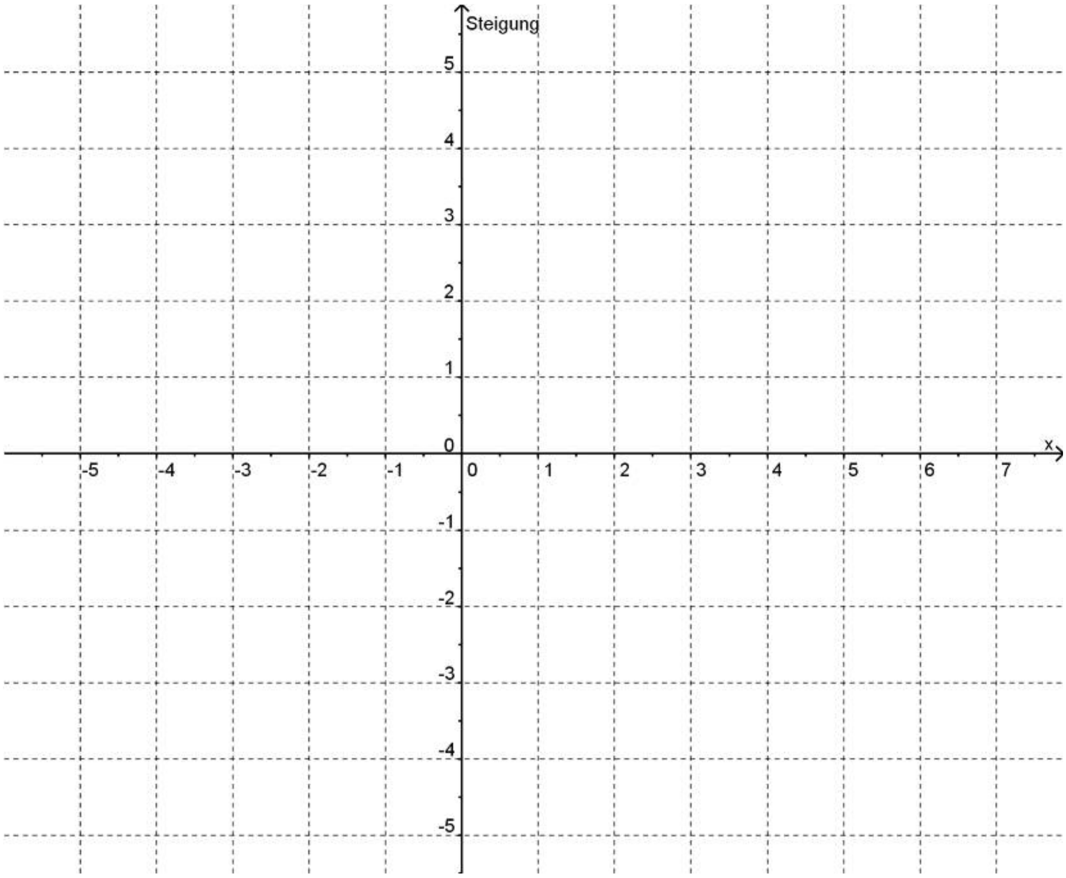
e. Die im Aufgabenteil d) eingezeichneten Punkte gehören zum Graphen einer Funktion, der zu *f* gehörenden Ableitungs- oder Steigungsfunktion f'.
Stellen Sie eine Vermutung über die Funktionsgleichung von f' auf und überprüfen Sie Ihre Vermutung mit dem CAS.

Anlage 1

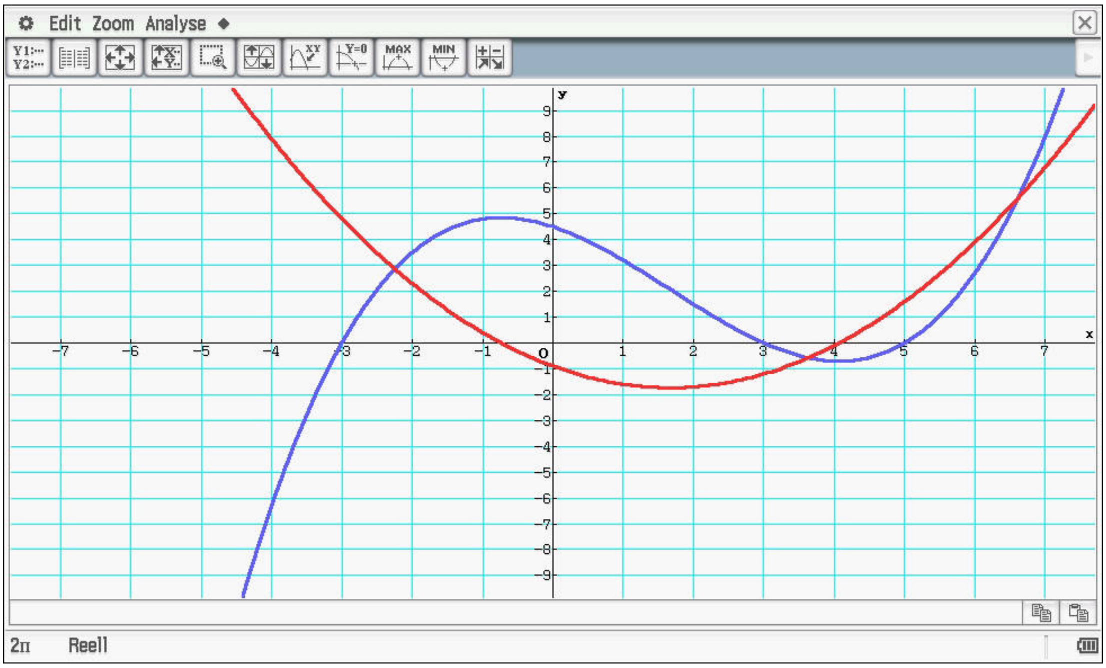




Anlage 2



a.	$f'(-3) = 4{,}8$ und $f'(6) = 3{,}9$ *Hinweis: Eine Schülerlösung sieht anders aus, weil die Schülerinnen und Schüler die abgelesenen Werte eines Steigungsdreiecks aufschreiben und den entsprechenden Quotienten bestimmen.*
b.	see figure below
c.	see table below
d.	Siehe Aufgabenteil b).



c.

Datei Edit Graph Calc

	A	B	C	D
1	h	Steig(−3)	Steig(6)	Steig(−1)
2	1	3.5	5.3	−0.3
3	0.1	4.661	4.031	0.321
4	0.01	4.78601	3.91301	0.39201
5	1E-3	4.7986001	3.9013001	0.3992001
6	1E-4	4.799860001	3.900130001	0.399920001
7	1E-5	4.799986	3.900013	0.399992
8	1E-6	4.7999986	3.9000013	0.3999992
9	1E-7	4.79999986	3.9000001	0.3999999
10	1E-8	4.799999986	3.9	0.4
11	1E-9	4.799999999	3.9	0.4
12	1E-10	4.8	3.9	0.4
13	1E-11	4.8	3.9	0.4
14	1E-12	4.8	3.9	0
15	1E-13	0	0	0
16	1E-14	0	0	0
17	1E-15	0	0	0
18				

=(f(−1+$A3)−f(−1))/$A3

D3:D17

e.	Es gibt viele sinnvolle Vorgehensweisen. Entscheidend ist der Ansatz, dass die Ableitungsfunktion eine quadratische Funktion ist. Lösungsansätze sind u. a. • Ausprobieren Die Parameter beim Ansatz einer quadratischen Funktion $f'(x) = ax^2 + bx + c$ werden variiert und mithilfe der Wertetabellenfunktion ist eine Überprüfung auf Übereinstimmung mit den im Aufgabenteil d) gefundenen Werten möglich. • Regression Mit drei oder mehr im Aufgabenteil d) herausbekommenen Werten wird mithilfe der Regressionsfunktion die entsprechende Funktion bestimmt. • Gleichungssystem Mit drei im Aufgabenteil d) herausbekommenen Werten werden mithilfe von drei Gleichungen die Parameter bestimmt. • … Als Lösungsterm erhält man: $f'(x) = \frac{3}{10}x^2 - x - \frac{9}{10}$